Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Ковровский государственный технологический университет
имени В.А. Дегтярева»

УТВЕРЖДАЮ:
Проректор по Ни ИД
Белогусев В.Н.
« 20 » мая 2026 г.

ПРОГРАММА
ВСТУПИТЕЛЬНОГО ИСПЫТАНИЯ
для поступающих на обучение по программам подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре по научной специальности
1.2.2 Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Ковров, 2026

Программу составили:

Котов В.В., к.т.н., доцент _____

Марихов И.А., к.т.н., доцент _____

Программа рассмотрена на заседании кафедры ПМ и САПР

Протокол № _4_ от « _22_ » __апреля__ 20_26_ г.

Зав. кафедрой ПМ и САПР _____ Котов В.В., к.т.н., доцент

Программа одобрена учебно-методической комиссией факультета АиЭ

Протокол № ___9_____ от « _20_ » ___мая_____ 20_26_ г.

Декан факультета АиЭ _____ А.А. Митрофанов, к.т.н., доцент

1. ОРГАНИЗАЦИОННО МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ПРОВЕДЕНИЮ ВСТУПИТЕЛЬНОГО АТТЕСТАЦИОННОГО ИСПЫТАНИЯ

Программа составлена на основе Федеральных государственных требований к структуре программ подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре и предназначена для подготовки к вступительному испытанию по научной специальности 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ.

Цель испытания – определить уровень готовности поступающего к освоению программы аспирантуры, оценить его знания в области численных методов и математического моделирования, а также выявить склонность к научно-исследовательской деятельности.

1) Уровень поступающего.

Лица, имеющие диплом магистра или специалиста.

2) Форма проведения испытания.

Очная (устный экзамен).

3) Порядок и регламент проведения испытания.

Экзамен проводится по экзаменационным билетам. Билет содержит два теоретических вопроса из разделов программы.

Время подготовки к ответу составляет **60 минут** с момента получения билета.

Процедура проведения:

- Поступающий предъявляет экзаменационной комиссии паспорт и экзаменационный лист.
- Вытягивает билет, оглашает его номер и приступает к подготовке письменных тезисов ответа на специальном бланке (черновике).
- Разрешается пользоваться калькулятором.
- Запрещается использование средств мобильной связи, наушников,

планшетов и любых иных электронных устройств хранения и передачи информации.

- По истечении времени, отведенного на подготовку (60 минут), или досрочно, поступающий отвечает по билету членам экзаменационной комиссии.
- Члены комиссии оценивают ответы, выставляют итоговую оценку, которую оглашают после окончания экзамена.

4) Критерии качества и полноты ответов.

Критерии оценки:

Оценка ответа поступающего производится по 100-балльной шкале. При оценке учитываются степень мотивации поступающего, его целеустремленность.

Критерии оценки:

- 80-100 баллов («Отлично»):
  - поступающий демонстрирует полные и прочные знания;
  - ответ построен логически правильно;
- 60-79 баллов («Хорошо»):
  - поступающий демонстрирует знания в рамках вопроса с малозначительными неточностями;
  - ответ построен логически правильно, но в суждениях и выводах есть несущественные ошибки;
- 40-59 баллов («Удовлетворительно»):
  - поступающий демонстрирует знания в рамках вопроса с пробелами; ответ дан в рамках вопроса;
  - присутствуют ошибки в суждениях и выводах;
- Менее 40 баллов («Неудовлетворительно»):
  - поступающий допускает много ошибок;
  - отсутствует логически завершённый ответ.

Минимальная сумма баллов – **40 баллов.**

2. ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ПРОГРАММЫ ВСТУПИТЕЛЬНОГО ИСПЫТАНИЯ

Для поступления в аспирантуру поступающий должен иметь знания по следующим дидактическим единицам:

Раздел 1. Основы математического моделирования и вычислительной математики

Понятие математической модели. Классификация математических моделей, принципы построения математических моделей на основе фундаментальных законов природы (законы сохранения, вариационные принципы). Понятие корректности математической задачи по Адамару. Примеры некорректных задач. Методы регуляризации некорректных задач (метод А.Н. Тихонова). Параметр регуляризации и способы его выбора. Основные типы дифференциальных уравнений в частных производных. Постановка краевых и начально-краевых задач. Понятие обобщённого решения дифференциальной задачи. Пространства Соболева и их роль в математическом моделировании. Устойчивость и сходимость разностных схем. Теорема Лакса об эквивалентности. Методы построения разностных схем: метод конечных разностей, метод конечных объёмов, вариационно-разностные методы. Аппроксимация, консервативность и монотонность разностных схем. Эффекты ложной аппроксимационной вязкости. Методы повышения порядка аппроксимации (схемы Рунге-Кутты, компактные разностные схемы). Метод конечных элементов: основные идеи, выбор пробных и весовых функций, построение матрицы жёсткости. Понятие жёсткости системы обыкновенных дифференциальных уравнений. L- и A-устойчивость неявных методов. Итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений: метод Якоби, Гаусса-Зейделя, метод последовательной верхней релаксации. Анализ сходимости. Вариационные итерационные методы: метод сопряжённых градиентов, метод минимальных невязок. Предобуславливание. Прямые методы решения СЛАУ (метод Гаусса, LU-разложение) для разреженных матриц: профильное хранение, метод вложенных сечений. Качественные методы исследования математических моделей: фазовый портрет, анализ на

устойчивость по Ляпунову, теория бифуркаций.Асимптотические методы в математическом моделировании (метод малого параметра, метод усреднения, теория возмущений).

Раздел 2. Численные методы, алгоритмы и программные комплексы

Метод конечных объёмов для уравнений гиперболического типа. Понятие потока (численные потоки Годунова, Роу, Lax-Friedrichs). Схемы с разностями против потока (upwind) для уравнений переноса. TVD-схемы и их свойства. Решение жёстких систем ОДУ: неявные методы Рунге-Кутты, методы Розенброка, методы BDF (backward differentiation formulas). Многосеточные методы (multigrid) для решения эллиптических задач. Принцип сглаживания ошибки и коррекции на грубых сетках. Методы расщепления по физическим процессам и пространственным направлениям. Итерационные методы для решения задач на собственные значения: метод степенной итерации, метод Ланцоша, метод Якоби для симметричных матриц. Парадигмы параллельного программирования. Декомпозиция области, обмен граничными данными, балансировка нагрузки. Методы распараллеливания итерационных методов. Принципы построения комплексов проблемно-ориентированных программ. Требования к надёжности, переносимости, расширяемости и производительности. Объектно-ориентированный подход при реализации численных алгоритмов: классы сеток, дискретизаторов, решателей, визуализаторов. Библиотеки и фреймворки для численного моделирования: архитектура, абстракции данных, возможности. Верификация программного обеспечения вычислительной математики: метод мануфактурированных решений (MMS), тесты с известными аналитическими решениями. Адаптивные сетки и методы локального измельчения. Критерии адаптации. Использование символьных вычислений для генерации кода численных методов. Методы декомпозиции области (Шварца, Неймана-Дирихле) для решения СЛАУ на распределённых вычислительных системах. Алгоритмы сжатия данных для больших вычислительных экспериментов. Понятие о неопределённостях в математическом моделировании: входные данные, параметры модели, формализация неопределённостей.

Раздел 3. Вычислительный эксперимент, валидация и анализ данных

Понятие вычислительного эксперимента. Отличие от натурного и идеального эксперимента. Роль вычислительного эксперимента как «третьего метода» научного познания. Основные этапы вычислительного эксперимента: постановка, дискретизация, выбор метода, проведение расчётов, визуализация, анализ погрешностей. Валидация и верификация математических моделей: определения, различие подходов, процедуры. Методы валидации на основе данных натурного эксперимента: сравнение полей решений, интегральных характеристик, статистические тесты. Методы сравнения результатов моделирования с экспериментальными данными при наличии шумов и малой выборки. Постановка и решение обратных задач математической физики: идентификация параметров модели, восстановление граничных или начальных условий. Регуляризованные алгоритмы интерпретации натурных данных (метод А.Н. Тихонова, итеративная регуляризация). Планирование вычислительного эксперимента: методы сокращения размерности. Методы глобальной оптимизации в задачах настройки моделей. Имитационное моделирование: определение, области применения. Дискретно-событийное, агентное и системно-динамическое моделирование. Сравнение с непрерывным детерминированным моделированием. Статистический анализ результатов численных экспериментов: вычисление моментов, доверительных интервалов, проверка гипотез (критерии Стьюдента, Колмогорова-Смирнова). Методы ансамблевого моделирования для оценки неопределённости прогноза. Проблема масштабирования (upscaling/downscaling) в моделях сложных систем: гомогенизация, методы пороговых элементов. Использование метамоделей (суррогатных моделей) для ускорения вычислительных экспериментов: полиномиальные хаосы, гауссовские процессы (кригинг). Методы обнаружения и фильтрации выбросов в результатах натурного эксперимента при валидации модели. Направления развития технологии математического моделирования: цифровые двойники, моделирование на основе данных (data-driven modeling), гибридные (нейросетевые) модели.

3. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Основная литература:

Математическое моделирование и вычислительная математика:

1. Самарский А.А., Михайлов А.П. «Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры». – М.: Физматлит, любое издание.

2. Тихонов А.Н., Самарский А.А. «Уравнения математической физики». – М.: Изд-во МГУ, любое издание.

3. Марчук Г.И. «Методы вычислительной математики». – М.: Наука, любое издание.

4. Калиткин Н.Н. «Численные методы». – М.: Наука, 1978 (или более поздние переиздания).

5. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. «Численные методы». – М.: Лаборатория знаний, любое издание.

Дифференциальные уравнения и разностные схемы:

6. Самарский А.А. «Теория разностных схем». – М.: Наука, 1989.

7. Годунов С.К., Рябенький В.С. «Разностные схемы (введение в теорию)». – М.: Наука, 1977.

8. Стренг Г., Фикс Дж. «Анализ метода конечных элементов». – М.: Мир, 1977.

Итерационные методы и линейная алгебра:

9. Самарский А.А., Николаев Е.С. «Методы решения сеточных уравнений». – М.: Наука, 1978.

10. Ильин В.П. «Методы и технологии конечных элементов». – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2007.

Параллельное программирование и комплексы программ:

11. Гергель В.П. «Высокопроизводительные вычисления для многоядерных и многопроцессорных систем». – М.: Изд-во МГУ, 2010.

12. Антонов А.С. «Введение в параллельное программирование с использованием MPI и OpenMP». – М.: Изд-во МГУ, 2013.

Валидация, обратные задачи и имитационное моделирование:

13. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. «Методы решения некорректных задач». – М.: Наука, 1986.
14. Банкина О.И. «Математическое моделирование: верификация и валидация». – М.: МФТИ, 2016 (или аналогичные курсы).
15. Строгалев В.И., Толмачева И.О. «Имитационное моделирование». – М.: МГТУ им. Баумана, 2008.

Дополнительная литература:

Журналы для ознакомления с современными направлениями (по желанию)

- «Журнал вычислительной математики и математической физики» (РАН).
- «Математическое моделирование» (РАН).
- «Вычислительные методы и программирование» (МГУ).
- «Сибирский журнал вычислительной математики» (СО РАН).

4. ПЕРЕЧЕНЬ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ ВОПРОСОВ

Раздел 1. Основы математического моделирования и вычислительной математики

1. Дайте определение математической модели. Классификация математических моделей (детерминированные/стохастические, непрерывные/дискретные, статические/динамические).
2. Принципы построения математических моделей на основе фундаментальных законов природы (законы сохранения, вариационные принципы).
3. Понятие корректности математической задачи по Адамару (существование, единственность, устойчивость решения). Примеры некорректных задач.

4. Методы регуляризации некорректных задач (метод А.Н. Тихонова). Параметр регуляризации и способы его выбора.
5. Основные типы дифференциальных уравнений в частных производных (эллиптические, параболические, гиперболические). Постановка краевых и начально-краевых задач.
6. Понятие обобщённого решения дифференциальной задачи. Пространства Соболева и их роль в математическом моделировании.
7. Устойчивость и сходимость разностных схем. Теорема Лакса об эквивалентности (устойчивость + аппроксимация = сходимость).
8. Методы построения разностных схем: метод конечных разностей, метод конечных объёмов, вариационно-разностные методы.
9. Аппроксимация, консервативность и монотонность разностных схем. Эффекты ложной аппроксимационной вязкости.
10. Методы повышения порядка аппроксимации (схемы Рунге-Кутты, компактные разностные схемы).
11. Метод конечных элементов: основные идеи, выбор пробных и весовых функций, построение матрицы жёсткости.
12. Понятие жёсткости системы обыкновенных дифференциальных уравнений. L- и A-устойчивость неявных методов.
13. Итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений: метод Якоби, Гаусса-Зейделя, метод последовательной верхней релаксации. Анализ сходимости.
14. Вариационные итерационные методы: метод сопряжённых градиентов, метод минимальных невязок. Предобуславливание.
15. Прямые методы решения СЛАУ (метод Гаусса, LU-разложение) для разреженных матриц: профильное хранение, метод вложенных сечений.
16. Качественные методы исследования математических моделей: фазовый портрет, анализ на устойчивость по Ляпунову, теория бифуркаций.
17. Асимптотические методы в математическом моделировании (метод малого параметра, метод усреднения, теория возмущений).

i. **Раздел 2. Численные методы, алгоритмы и программные комплексы**

18. Метод конечных объёмов для уравнений гиперболического типа. Понятие потока (численные потоки Годунова, Роу, Lax-Friedrichs).
19. Схемы с разностями против потока (upwind) для уравнений переноса. TVD-схемы и их свойства (монотонность, отсутствие немонотонных осцилляций).
20. Решение жёстких систем ОДУ: неявные методы Рунге-Кутты, методы Розенброка, методы BDF (backward differentiation formulas).
21. Многосеточные методы (multigrid) для решения эллиптических задач. Принцип сглаживания ошибки и коррекции на грубых сетках.
22. Методы расщепления по физическим процессам и пространственным направлениям (метод переменных направлений, метод дробных шагов).
23. Итерационные методы для решения задач на собственные значения: метод степенной итерации, метод Ланцоша, метод Якоби для симметричных матриц.
24. Парадигмы параллельного программирования. Декомпозиция области, обмен граничными данными, балансировка нагрузки.
25. Методы распараллеливания итерационных методов (параллельный метод сопряжённых градиентов, параллельный многосеточный метод).
26. Принципы построения комплексов проблемно-ориентированных программ. Требования к надёжности, переносимости, расширяемости и производительности.
27. Объектно-ориентированный подход при реализации численных алгоритмов: классы сеток, дискретизаторов, решателей, визуализаторов.
28. Библиотеки и фреймворки для численного моделирования: архитектура, абстракции данных, возможности.
29. Верификация программного обеспечения вычислительной математики: метод мануфактурированных решений (MMS), тесты с известными аналитическими решениями.
30. Адаптивные сетки и методы локального измельчения (h-адаптация, p-адаптация, hp-адаптация). Критерии адаптации (апостериорные оценки ошибки).

31. Использование символьных вычислений для генерации кода численных методов (автоматическое дифференцирование, вывод матриц Якоби).
32. Методы декомпозиции области (Шварца, Неймана-Дирихле) для решения СЛАУ на распределённых вычислительных системах.
33. Алгоритмы сжатия данных для больших вычислительных экспериментов (собственные ортогональные разложения, вейвлет-сжатие полей решения).
34. Понятие о неопределённостях в математическом моделировании: входные данные, параметры модели, формализация неопределённостей (интервальный, вероятностный подходы).

a. **Раздел 3. Вычислительный эксперимент, валидация и анализ данных**

35. Понятие вычислительного эксперимента. Отличие от натурного и идеального эксперимента. Роль вычислительного эксперимента как «третьего метода» научного познания.
36. Основные этапы вычислительного эксперимента: постановка, дискретизация, выбор метода, проведение расчётов, визуализация, анализ погрешностей.
37. Валидация и верификация математических моделей: определения, различие подходов, процедуры.
38. Методы валидации на основе данных натурного эксперимента: сравнение полей решений, интегральных характеристик, статистические тесты.
39. Методы сравнения результатов моделирования с экспериментальными данными при наличии шумов и малой выборки (bootstrap, перекрёстная проверка).
40. Постановка и решение обратных задач математической физики: идентификация параметров модели, восстановление граничных или начальных условий.
41. Регуляризованные алгоритмы интерпретации натурных данных (метод А.Н. Тихонова, итеративная регуляризация).

42. Планирование вычислительного эксперимента: методы сокращения размерности (анализ главных компонент, латинский гиперкуб).
43. Методы глобальной оптимизации в задачах настройки моделей (генетические алгоритмы, метод роя частиц, имитационный отжиг).
44. Имитационное моделирование: определение, области применения. Дискретно-событийное, агентное и системно-динамическое моделирование. Сравнение с непрерывным детерминированным моделированием.
45. Статистический анализ результатов численных экспериментов: вычисление моментов, доверительных интервалов, проверка гипотез (критерии Стьюдента, Колмогорова-Смирнова).
46. Методы ансамблевого моделирования (ансамбль Калмана, методы Монте-Карло с подмножествами) для оценки неопределённости прогноза.
47. Проблема масштабирования (upscaling/downscaling) в моделях сложных систем: гомогенизация, методы пороговых элементов.
48. Использование метамоделей (суррогатных моделей) для ускорения вычислительных экспериментов: полиномиальные хаосы, гауссовские процессы (кригинг).
49. Методы обнаружения и фильтрации выбросов в результатах натурного эксперимента при валидации модели (критерий Граббса, робастные оценки).
50. Направления развития технологии математического моделирования: цифровые двойники, моделирование на основе данных (data-driven modeling), гибридные (нейросетевые) модели.